Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die geläufige quadratische Gleichung, die es zu lösen gilt, hat die Form

$$x^2 + px + q = 0.$$

Die Formel, die diese Gleichung lösen kann, lautet

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und heißt korrekt Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Manchmal findet man auch die Bezeichnung „pq–Formel“ (das liegt an den Koeffizienten p und q).
Na schön! Es gibt eine Formel. Was soll dann dieses Dokument?

Die Antwort ist einfach! Was passiert, wenn die Gleichung nicht so aussieht, wie die oben? Die ist nämlich „nur“ ein Spezialfall der allgemeinsten Form einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot x^2 + \frac{p_1}{p_2} \cdot x + \frac{q_1}{q_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Und jetzt?

Wer diese Gleichung jetzt direkt lösen kann, ist klar im Vorteil. Man kann jetzt wild rumrechnen, umformen und das Ding lösen. Prima, wenn man weiß, wie's geht!
Für alle die, die es nicht wissen, habe ich dieses Dokument geschrieben. Das können Leute sein, die sich dafür interessieren, aber auch die sich dafür nicht interessieren, es aber lernen müssen (z. B. Schüler und Studenten).

2 Binomische Formeln

Diese drei einfachen Formeln zeigen lediglich die Möglichkeiten, was passiert, wenn man $(a + b)$ und $(a - b)$ in jeder Kombination miteinander multipliziert.
Für die Lösung quadratischer Gleichungen benötigen wir bloß die Erste Binomische Formel. Die anderen stehen hier nur wegen der Vollständigkeit (wenn man eine kann, will

man hoffentlich auch die anderern können)!

2.1 Erste Binomische Formel

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

2.2 Zweite Binomische Formel

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

2.3 Dritte Binomische Formel

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a^2\underbrace{-ab+ab}_{=0}-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

3 Herleitung einer Lösungsformel

Der Schlüssel zur Herleitung der Lösungsformel liegt in der sogenannten „quadratischen Ergänzung“. Diese quadratische Ergänzung hat den Sinn, auf beiden Seiten der Gleichung etwas zu addieren, um dadurch was zu erreichen.
Na super. Und was soll das?
Ganz einfach: durch Addieren der quadratischen Ergänzung erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung die erste Binomische Formel, aus der dann die Wurzel gezogen werden kann.
Für die quadratische Ergänzung gibt es die Reihenfolge

① halbieren

② quadrieren

③ addieren

Das liegt daran, daß nach der Ersten Binomischen Formel gilt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Im Falle unseres Lösungsproblems haben wir zwar das a^2 (bei uns das x^2), das $2ab$ (auch, wenn's anders aussieht: das a ist das x und das $2b$ ist das p), aber nicht das b^2. Wir konstruieren uns das dann eben aus dem p, indem wir es halbieren ($\frac{p}{2}$), quadrieren ($\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$) und dann addieren.
Die Erste Binomische Formel anders geschrieben (auf uns zugeschnitten):

$$x^2 + 2xb + y = (a + b)^2$$

Dieses y wollen wir haben, denn das ist genau die quadratische Ergänzung: $y = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$.

3.1 Geläufiger, aber spezieller Fall

Versucht also einfach mal, der folgenden Beweisführung der Lösung der einfachsten Form der Gleichung zu folgen:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \mid -q \\
x^2 + px &= -q && \mid +\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadr. Erg.)} \\
\underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{1. Binomische Formel}} &= \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q && \mid\sqrt{\ } \\
x + \tfrac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} &\vee x = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}$$

3.2 Allgemeiner Fall

Weil eben alles nicht so einfach ist wie oben, kommt hier noch die Herleitung für den allgemeinen Fall (also machen wir uns das Leben richtig schwer und setzen Brüche als Koeffizienten, eine Koeffizienten für x^2 und die Gleichung ungleich Null). Also mir macht's Spaß!!

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{a_1}{a_2}x^2 + \frac{p_1}{p_2}x + \frac{q_1}{q_2} & = & \frac{b_1}{b_2} & \left| - \frac{q_1}{q_2} \right. \\
\frac{a_1}{a_2}x^2 + \frac{p_1}{p_2}x & = & \frac{b_1}{b_2} - \frac{q_1}{q_2} & \left| \div \frac{a_1}{a_2} \right. \\
x^2 + \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}x & = & \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1} & \left| + \left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 \right. \\
x^2 + \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}x + \left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 & = & \left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1} & \\
\left(x + \frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 & = & \left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1} & \left| \sqrt{} \right. \\
x + \frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1}} & \\
x_1 & = & -\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1} + \sqrt{\left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1}} & \text{oder} \\
x_2 & = & -\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1} - \sqrt{\left(\frac{p_1 a_2}{2 \cdot p_2 a_1}\right)^2 + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} - \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1}} &
\end{array}
$$

Wenn man jetzt mal gewissenhaft die Formeln vergleicht und sich die Unterschiede in der jeweiligen (quadratiuschen) Ausgangsgleichung vergleicht, merkt, daß der erste „Block“ der Spezialfall des zweiten ist. Schrittweise sieht man das so:

$a_1 = a_2 \neq 0$: Der Koeffizient von x^2 ist also 1 und somit kann man a_1 und a_2 aus den Brüchen rauskürzen:

$$x_{1;2} = -\frac{p_1}{2 \cdot p_2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2 \cdot p_2}\right)^2 + \frac{b_1}{b_2} - \frac{q_1}{q_2}}$$

$p_2 = 1$: p ist kein Bruch:

$$x_{1;2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 + \frac{b_1}{b_2} - \frac{q_1}{q_2}}$$

$q_2 = 1$: q ist kein Bruch:

$$x_{1;2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 + \frac{b_1}{b_2} - q_1}$$

$b_1 = 0$: Das Ergebnis der quadratischen Gleichung ist 0:

$$x_{1;2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - q_1}$$

Alles klar?